

Data Structures and algorithms

Instructor : Dr.Amin Eskandari

Head-Ta's : Hamid Namjoo manesh , Amir Hossein Hemati , Ali Mojahed
Ta's : Amir Mohammad Asadjoo , Padina razmjooi , Armin Janfaza , Alireza Heydari , Mahdi Torabi ,
Maryam Ghorbani , Fatemeh Keshavarz , MohammadReza Fasli , Abolfazl Tadrissi

Quiz 02 Answers

پاسخنامه آزمون شماره ۰۲

جواب سوال اول :

برای مقایسه این دو تابع از طرفین لگاریتم می گیریم :

$$[\log n]! \stackrel{?}{\sim} n^3 \rightarrow \log[\log n]! \stackrel{?}{\sim} \log n^3$$

می دانیم که $\log u! = u \log u$

پس داریم :

$$\log[\log n]! \stackrel{?}{\sim} \log n^3 \rightarrow [\log n] \log[\log n] \stackrel{?}{\sim} 3 \log n$$

نکته ای که باید در نظر داشت این است که در مبحث رشد، سقف و کف اهمیتی ندارد و می توان از آن صرف نظر کرد.

$$\log n \times \log \log n \stackrel{?}{\sim} 3 \log n \rightarrow [\log n]! > n^3$$

پس رشد $[\log n]!$ از رشد هر n^k ای بیشتر است بنابراین رشد $[\log n]!$ محدود به چند جمله ای نیست.

جواب سوال دوم :

(الف)

با اولین نگاه به تابع داده شده متوجه لگاریتمی بودن تابع $F(n)$ می شویم، از روش های برخورد با این گونه توابع لگاریتمی در توابع بازگشتی این است که وقتی تابع $F(n)$ دارای $\log^i n$ هست ، لگاریتم را کنار بگذارید و در نظر نگیرید. حال بیا بید $n^{\log_b a}$ را با $F(n)$ بدون لگاریتم مقایسه کنید.

1. اگر $n^{\log_b^a}$ بزرگتر بود ، مرتبه تابع همان می شود
2. اگر $F(n)$ بدون لگاریتم بزرگتر بود، مرتبه می شود $F(n)$ به همراه لگاریتمی که در نظر نگرفتیم
3. اگر دو طرف مساوی بود ، می شود $F(n)$ ضرب در $\log$

اما بیا با استفاده از قضیه اصلی این تابع را حل کنیم

$$a = 4, b = 2, f(n) = n^3 \log n \rightarrow n^{\log_2^4} ? n^3 \log n \rightarrow n^2 ? n^2 \times n \times \log n \rightarrow 1 ? n \log n$$

پس با توجه به حالت دوم قضیه اصلی و از آنجایی که $f(n) > n^{\log_b^a}$ ، مرتبه این تابع می شود :

$$T(n) \in \theta(f(n)) \rightarrow T(n) \in \theta(n^3 \log n)$$

(ب)

به اولین مشکلی که با نگاه به این تابع بر می خوریم این است که تابع دارای ضریب ثابت نیست و ضریب متغیر است.

پس اولین قدم این است که ضریب متغیر را از بین ببریم.

نکته ای که باید همیشه در نظر داشته باشید این است که باید کاری کنید که طرفین تابع مشابه شوند.

فرض کنید که طرفین را بر $\sqrt{n}$ تقسیم کنیم . نتیجه می شود:

$$\frac{T(n)}{\sqrt{n}} = 2 T(\sqrt{n}) + \sqrt{n} \log n$$

که نه تنها مشکل ما را برطرف نکرده بلکه مشکلی به مشکلات ما اضافه کرده.

اما بیا با طرفین را بر n تقسیم کنیم

$$\frac{T(n)}{n} = 2 \frac{T(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} + \log n$$

می بینیم که طرفین تساوی به یک دیگر شبیه شده اند.

حال بیا با نام گذاری ، دوباره تابع را تغییر دهیم.

$$\frac{T(n)}{n} = f(n)$$

در ادامه این نام گذاری را در کل تابع بسط می دهیم تا به تابع زیر برسیم.

$$f(n) = 2 f(\sqrt{n}) + \log n$$

حال که به ضریب ثابت رسیده ایم. می توانیم با استفاده از روش تغییر متغیر پیش برویم

$$n = 2^m \rightarrow f(2^m) = 2 f\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + \log 2^m = 2 f\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + m \log_2 2 = 2 f\left(2^{\frac{m}{2}}\right) + m$$

حال می توانیم با نام گذاری بگوییم :

$$if f(2^m) = g(m) \rightarrow g\left(\frac{m}{2}\right) = f\left(2^{\frac{m}{2}}\right) \rightarrow g(m) = 2g\left(\frac{m}{2}\right) + m$$

تابع پایانی را حالا می توانیم با استفاده از قضیه اصلی بدست بیاوریم و در نهایت با توجه به حالت سوم قضیه اصلی داریم :

$$m^{\log_2 2} ? m \rightarrow m = m \rightarrow g(m) \in \theta(m \log m)$$

اما هنوز کار ما به پایان نرسیده زیرا ما به دنبال مرتبه تابع $g(m)$ نبوده ایم و به دنبال مرتبه تابع $f(n)$ بودیم. پیش تر گفته بودیم که :

$$g(m) = f(2^m)$$

پس می توانیم بگوییم که :

$$f(2^m) \in \theta(m \log m)$$

حال اگر به عقب تر بازگردیم، زمانی که متغیر را تغییر دادیم گفتیم که

$$n = 2^m$$

پس می توانیم بگوییم که

$$n = 2^m \rightarrow m = \log_2 n$$

حال بیایید این نتیجه را جای گذاری کنیم تا تابع به فرم $f(n)$ بدست آید

$$\rightarrow g(m) = f(2^m) \in \theta(m \log m) \rightarrow f(n) \in \theta(\log n \times \log \log n)$$

اکنون به پایان کار نزدیک شده ایم اما هنوز کار ما به اتمام نرسیده و باز هم باید یک قدم به عقب برگردیم ، جایی که تابع را با نام گذاری به $f(n)$ تغییر دادیم گفته بودیم که :

$$\frac{T(n)}{n} = f(n) \rightarrow T(n) = n \times f(n), f(n) \in \theta(\log n \times \log \log n) \rightarrow T(n) \in \theta(n \log n \times \log \log n)$$

(ج)

این مورد نیز با استفاده از قضیه اصلی قابل حل نیست و به روش تغییر متغیر آن را حل می کنیم.
نکته ای که باید در نظر داشته باشید این است که هنگامی که در توابع شما رادیکال ظاهر می شود اکثر اوقات شما باید از روش تغییر متغیر کمک بگیرید.
بیایید ابتدا برای تغییر متغیر از پایه 5 استفاده کنیم.

$$n = 5^m \rightarrow T(5^m) = 2T\left(\frac{5^{\frac{m}{4}}}{5}\right) + m = 2T\left(5^{\frac{m}{4}-1}\right) + m$$

نکته ای که باید در تغییر متغیر توابعی که در صورت تابع رادیکال آورده شده لحاظ کنید این است که در تغییر متغیر شما می توانید از هر پایه ای استفاده کنید اما اگر که پایه درست را انتخاب نکرده باشید هنگامی که به حل تابع ادامه می دهید در نهایت به نقطه ای می رسید که پایه اشتباه را انتخاب کرده اید و باید از پایه دیگری استفاده کنید.

علتی که $\log n$ به m ساده می شود این است که از آنجایی که مرتبه برای ما مهم است و $m \log 5 \sim 2. \dots m$ می توانیم از این لگاریتم صرف نظر کنیم.

حال بیایید تابع نهایی را با نام گذاری تغییر دهیم :

$$f(m) = T(5^m) \rightarrow f(m) = 2f\left(\frac{m}{4} - 1\right) + m$$

نکته دیگری که باید در نظر داشته باشید این است که از آنجایی که باز هم هدف ما بدست آوردن مرتبه تابع هست ، می توان از جمع و تفریق های اعداد ثابت صرف نظر کنیم. پس :

$$f(m) = 2f\left(\frac{m}{4}\right) + m$$

حال می توانیم این تابع را با استفاده از قضیه اصلی حل کنیم.

$$a = 2, b = 4, m \rightarrow m^{\log_4^2} ? m \rightarrow f(m) \in \theta(m)$$

حال به عقب باز می گردیم تا مرتبه تابع اولیه را بدست آوریم :

$$\log_5^n = m \rightarrow f(m) = T(5^m) \in \theta(m) \rightarrow n = 5^m \rightarrow T(n) \in \theta(\log n)$$

(د)

برای حل این رابطه ابتدا بیاید عبارت $\log^2 n!$ را ساده کنیم :

$$\log^2 n! = (\log n!)^2 = n^2 \log^2 n$$

حال که $f(n)$ را ساده کرده ایم می توانیم این تابع را با استفاده از قضیه اصلی حل کنیم.

$$a = 16, b = 4, f(n) = n^2 \log^2 n \rightarrow n^{\log_4^{16}} ? n^2 \log^2 n \rightarrow T(n) \in \theta(n^2 \log^2 n)$$

جواب سوال سوم :

بیاید تا ابتدا با مسئله ژوزفوس (Josephus) آشنا شویم.

مسئله ژوزفوس به این صورت است که اعداد یک تا n دور یک دایره نوشته شده اند و در جهت عقربه های ساعت از شماره 2 به صورت یکی در میان اعداد را حذف می کنیم تا در نهایت یک شماره باقی بماند.

روش اول برای حل این مسئله و پیدا کردن شماره باقی مانده استفاده از فرمول های بازگشتی می باشد.

$$\begin{cases} J(2n) = 2J(n) - 1 \rightarrow \text{زوج} \\ J(2n + 1) = 2J(n) + 1 \rightarrow \text{فرد} \end{cases}$$

$$J(1) = 1, J(2) = 1$$

در این مسئله n عدد 21 است پس داریم

$$21 = 2n + 1 \rightarrow n = 10$$

$$J(21) = 2J(10) + 1 \rightarrow 11$$

$$J(10) = 2J(5) - 1 \rightarrow 5$$

$$J(5) = 2J(2) + 1 = 3$$

در این سیستم و مسئله ژوزفوس ما با یک دایره از افراد سروکار داریم که به ترتیب شماره گذاری شده اند. سپس، از یک نقطه شروع و به صورت دوره ای افراد را می شماریم و هر K امین نفر را حذف می کنیم تا زمانی که تنها یک نفر باقی بماند.

باید توجه داشته باشید که در این فرآیند افراد در یک دایره قرار دارند و شمارش از نفر بعدی پس از حذف نفر قبلی ادامه می یابد و در هر مرحله یک نفر از دایره حذف می شود و برای رسیدن به نفر K ام باید در دایره حرکت کنیم.

برای پیاده سازی این سیستم بهترین داده ساختار ، لیست پیوندی دایره ای است. اما چرا بهترین؟ در وهله اول لیست پیوندی دایره ای بازنمایی طبیعی دایره است. این ساختار داده به طور ذاتی حلقوی است. آخرین عنصر به اولین عنصر اشاره می کند و اولین عنصر به عنصر دوم و غیره.

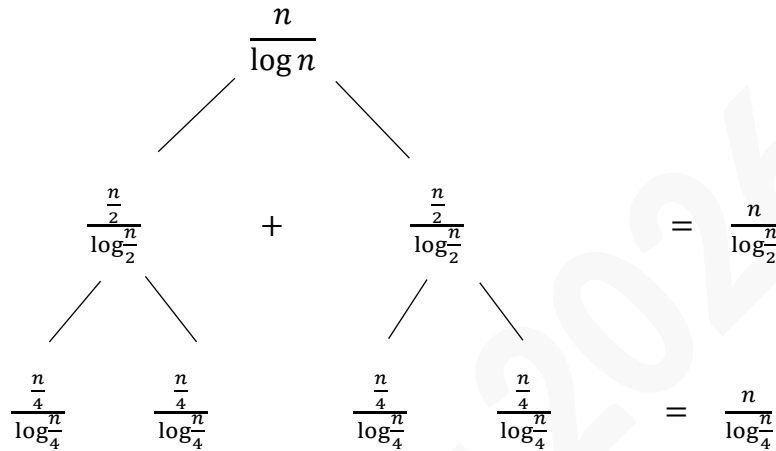
فرض کنید در لیست پیوندی حلقوی به عنصری رسیده ایم که باید حذف شود. اگر اشاره گری به عنصر قبل از آن عنصر داشته باشیم ، می توانیم با تغییر اشاره گر عنصر قبلی به عنصر بعد از عنصر مورد نظر، آن را حذف کنیم. این عملیات تغییر دو اشاره گر، پیچیدگی زمانی $O(1)$ دارد. همچنین لیست پیوندی حلقوی می تواند به راحتی رشد کند یا کوچک شود که برای مسئله ژوزفوس که اندازه دایره با هر حذف کاهش می یابد، ایده آل است.

.....

جواب سوال چهارم :

برای حل این رابطه و مرتبه آن از روش درخت بازگشت استفاده می کنیم.

ابتدا بیایید تا درخت بازگشت این رابطه را رسم کنیم. ریشه درخت بازگشت را $\frac{n}{\log n}$ قرار می دهیم و فرزندان سمت چپ و راست آن را $\frac{n}{2}$.



حال بیاید بررسی کنیم که آیا می توانیم هزینه هر سطح (کسر ها) را ساده تر کنیم یا خیر.

$$\frac{n}{\log \frac{n}{2}} \rightarrow \log \frac{n}{2} = \log n - \log 2 = (\log n) - 1, \frac{n}{\log \frac{n}{4}} = (\log n) - 2$$

حال بیاید با جمع کردن هزینه سطوح مرتبه $T(n)$ را محاسبه کنیم :

$$\frac{n}{\log n} + \frac{n}{(\log n)-1} + \frac{n}{(\log n)-2} + \dots + \frac{n}{(\log n)-((\log n)-1)} = n \left(\frac{1}{\log n} + \frac{1}{(\log n)} + \dots + \frac{1}{1} \right)$$

حال به عبارت نهایی بالا بیایید نگاهی ببندازیم. به جای اینکه که از چپ به راست به نتیجه نهایی نگاه کنیم، از راست به چپ نگاه می کنیم.بله ، سری هارمونیک است.

پس با توجه به سری هارمونیک که به شکل $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{u} = Lnu$ می باشد، اگر $u = \log n$ باشد حاصل این عبارت $\log \log n$ می شود و مرتبه این رابطه نیز $n \log \log n$ می شود

جواب سوال پنجم :

در رابطه با مبحث رشد و برای مقایسه رشد توابع باید بدانیم که تشخیص رشد در واقع به این معنی است که سرعت رشد چه تابعی از تابع دیگر بیشتر می باشد.

می دانیم که رشد توابع در توابع صعودی یعنی اگر n را به سمت ∞ پیش ببریم ، کدام تابع زودتر به سمت ∞ می رود و منظور از رشد توابع در توابع نزولی این است که اگر n را به سمت ∞ ببریم کدام تابع دیرتر به ∞ میل می کند.

باید توجه داشته باشید که دقیق ترین ابزار برای بررسی رشد دو تابع نسبت به هم دیگر حد است. می توانیم با استفاده از مقایسه های انجام شده به وسیله حد نکاتی را استفاده کنیم که در مقایسه ها به ما کمک می کنند تا نیازی نباشد که برای تمامی مقایسه ها حد دو تابع را حساب کنیم.

بیا بدو ابتدا دو تابع $n \log n$ ؟ n^2 را مقایسه کنیم:

$$n^2 = n \times n \quad n \log n \rightarrow \text{پس از خط خوردن } n \text{ ها}$$

پس :

$$n^2 > \log n$$

در مقایسه بعدی دو تابع $n \log n$ ؟ $n \log \log n$ را مقایسه می کنیم.

توجه : $\log$ کوچک کننده است.

در این مقایسه نیز پس از خط زدن n ها و ساده کردن دو طرف در نهایت به $\log \log n$ ؟ $\log n$ می رسیم. میدانیم که $\log n$ به هر توان ثابت مثبت از $\log \log n$ به هر توان ثابت مثبت رشد بیشتری دارد پس تا به اینجا داریم:

$$n \log \log n < n \log n < n^2$$

با توجه به نکته ای که قبل تر گفته شد می توانیم دو تابع $n^{\log \log n}$ ؟ $n^{\log n}$ را نیز مقایسه کنیم. چون پایه ها برابر هستند و رشد $\log n$ به هر توان ثابت مثبت از $\log \log n$ به هر توان ثابت مثبت رشد بیشتری دارد که نتیجه آن می شود :

$$n^{\log \log n} < n^{\log n}$$

برای مقایسه 2^n ؟ $n^{\log \log n}$ باید از هر دو طرف مقایسه لگاریتم بگیریم :

$$\log n^{\log \log n} \rightarrow \log n \times \log n = (\log n)^2, \log 2^n = n \log 2 \rightarrow n^{\log \log n} < 2^n$$

حال بیابید دو تابع $n^{\log n}$ ؟ $(\log n)^{\log n}$ را مقایسه کنیم. می بینیم که توان های هر دو طرف یکسان هستند، پس پایه ها را مقایسه می کنیم. می دانیم که رشد تابع n از رشد $\log n$ بیشتر است پس $(\log n)^{\log n} < n^{\log n}$

برای مقایسه دو تابع $(\log n)^n$ ؟ $(\log n)^{\log n}$ از آنجایی که پایه ها برابر هستند، توان ها را مقایسه می کنیم. چون رشد n بیشتر از رشد $\log n$ می باشد پس $(\log n)^{\log n} < (\log n)^n$

حالا می خواهیم دو تابع $n^{\log n}$ ؟ $(\log n)^n$ را مقایسه کنیم. اگر باز هم از دو طرف لگاریتم بگیریم داریم:

$$\log(\log n)^n = n \log \log n, \log n^{\log n} = \log n \times \log n = (\log n)^2 \rightarrow (\log n)^n > n^{\log n}$$

اگر بخواهیم به صورت شهودی هم این مقایسه را بررسی کنیم از خود می پرسیم که یک عدد کوچک به توان بزرگ رشد بیشتری دارد یا یک عدد بزرگ به توان یک عدد کوچک؟

$$a^{\log b} = b^{\log a} \rightarrow n^{\log \log n} = (\log n)^{\log n} \text{ نکته:}$$

$$a^{\log b} = b^{\log a} \rightarrow n^{\log \log n} = (\log n)^{\log n} < n^{\log n} < (\log n)^n$$

پس تا به اینجا داریم :

$$n \log \log n < n \log n < n^2 < n^{\log \log n} = (\log n)^{\log n} < n^{\log n} < (\log n)^n$$

حالا دو تابع $n^{\log n}$ ؟ 2^n را مقایسه می کنیم . اگر از هر دو طرف لگاریتم بگیریم :

$$n^{\log n} ? 2^n \rightarrow \log n^{\log n} ? \log 2^n \rightarrow \log n \times \log n = (\log n)^2 ? n \log 2 \rightarrow n^{\log n} < 2^n$$

حال نمیدانیم که 2^n بعد از $(\log n)^n$ قرار می گیرد یا قبل از آن. پس باید این دو را نیز مقایسه کنیم.

$$\begin{aligned} (\log n)^n ? 2^n &\rightarrow \log(\log n)^n ? \log 2^n \\ &\rightarrow n \log \log n ? n \log 2 \rightarrow \log \log n ? \log 2 \rightarrow (\log n)^n > 2^n \end{aligned}$$

حتی از این دید می شد مقایسه کرد که از آنجا که توان ها یکسان هستند پایه ها را مقایسه می کنیم .

پس مرتب شده توابع تا به اینجا کار به صورت زیر می شود :

$$n \log \log n < n \log n < n^2 < n^{\log \log n} = (\log n)^{\log n} < n^{\log n} < 2^n < (\log n)^n$$

حال دو تابع $n!$ و $(\log n)^n$ را مقایسه می کنیم. اگر بازهم از هر دو طرف لگاریتم بگیریم داریم :

ابتدا نشان می دهیم که $\log n! \in O(n \log n)$:

$$\begin{aligned} \log n! &= \log n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1 \\ &= \log n \\ &\quad + \log n - 1 \\ &\quad + \log n - 2 \\ &\quad + \dots \log 1 \\ &< \log n \\ &\quad + \log n + \dots + \log n = n \log n \rightarrow \log n! < n \log n \rightarrow \log n! \in O(n \log n) \end{aligned}$$

بیاثبات کنیم که $\log n! \in \Omega(n \log n)$:

$$\begin{aligned} \log n! &= \log n \times n-1 \times \dots \times \log 1 = \log n + \log n-1 + \dots + \log \frac{n}{2} + \log \frac{n}{2} - 1 + \dots + \log 1 \\ \log \frac{n}{2} + \log \frac{n}{2} + \dots + \log \frac{n}{2} &= \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} = \frac{n}{2} (\log n - \log 2), \frac{n}{2} (\log n - 1) = n/2 \log n - n/2 \\ \rightarrow \log n! &\in \Omega(n \log n) \rightarrow \log n! \in \theta(n \log n) \end{aligned}$$

حال با لگاریتم گیری دو تابع را مقایسه می کنیم.

$$(\log n)^n ? n! \rightarrow \log(\log n)^n ? \log n! \rightarrow n \log \log n ? n \log n \rightarrow n! > (\log n)^n$$

نتیجه نهایی مقایسه های ما می شود :

$$n \log \log n < n \log n < n^2 < n^{\log \log n} = (\log n)^{\log n} < n^{\log n} < (\log n)^n < n! < n^n$$

جواب سوال ششم :

مرتبۀ *radix sort* به صورت زیر است :

$$\theta(d(n+r))$$

و d تعداد ارقام n ، تعداد اعداد r مبنا اعداد (ارقام) می باشد.

در صورت سوال گفته شده که n عدد b بیتی داریم.

بیا یک عدد را در نظر بگیریم.

$$a_{b-1} \cdots a_2 a_1 a_0$$

و از آنجایی که گفته شده هر عدد را به صورت ارقام r بیتی در نظر بگیریم، پس هر r بیت را یک رقم به شمار می آوریم.

تعداد ارقام ما برابر است با :

$$\left\lceil \frac{b}{r} \right\rceil$$

اما چرا سقف؟ فرض کنید عدد ما شامل پنج بیت باشد و ارقاممان را هر 4 بیت در نظر بگیریم. اینجا تکلیف بیت پنجم مشخص نیست. (هرچند که در نظر گرفتن سقف یا کف برای این مسئله آنچنان اهمیتی ندارد).

در رابطه با مبنا هم از آنجایی که گفته شده هر رقم r بیت است ماکزیمم می تواند 2^r باشد.

با این تفاسیر مرتبه برابر می شود با :

$$\theta\left(\frac{b}{r}(n + 2^r)\right)$$